2.1.ª Lista de Exercícios de MAT 3110

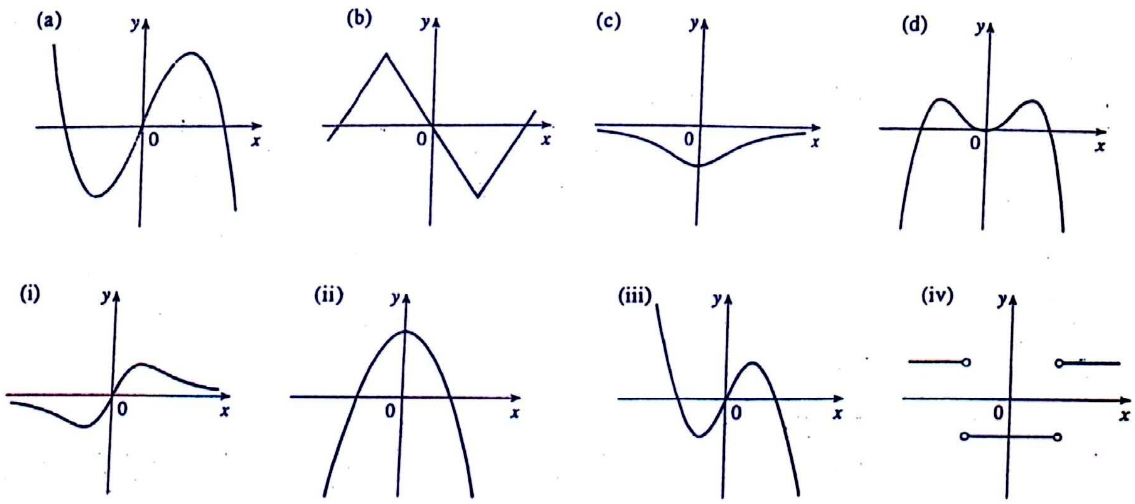
BMAC - IME - 1o. sem. 2013 - Turma 54

Profa. Maria Izabel Ramalho Martins

I. Sobre derivadas

1. Mostre **pela definição** que $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ é derivável em $x = -1$.

2. Associe cada um dos gráficos de função, de (a) a (d), com os gráficos de suas respectivas derivadas, de (i) a (iv).



3. Considere a função $f(x) = x\,|\,x\,|$. Discuta as "soluções" (sol.) abaixo para decidir se f é derivável em $x = 0$ e, em sendo, calcule o valor $f'(0)$.

"sol. 1": $f'(0) = 0$, pois $f(0) = 0$.

"sol. 2": Como a função g não é derivável em $x = 0$, não é possível usar a regra do produto para derivar f em $x = 0$. Logo f não é derivável em $x = 0$.

"sol. 3": De $f(x) = h(x)g(x)$, onde $h(x) = x$ e $g(x) = |\,x\,|$, temos que $f\,'(0) = h\,'(0)g(0) + h(0)g\,'(0)$. Como $g(0) = 0 = h(0)$, então $f\,'(0) = 0$.

"sol. 4": Olhemos o $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 \in \mathbb{R}$. Portanto, f é derivável em $x = 0$ e $f\,'(0) = 0$.

4. Determine constantes a, b e c de forma que a função $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 5x + 6, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ seja derivável em $x = 1$ e que $f\,'(0) = 0$.

5. Determine f', para as funções f dadas abaixo.

a. $f(x) = 3x^2 + \cos x + \pi^2$ **b.** $f(x) = \dfrac{2x-1}{\operatorname{tg} x}$ **c.** $f(x) = \cos x + (x^2+1)\operatorname{sen} x$

d. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ **e.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ **f.** $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x}} + \dfrac{\pi}{x^2}$

g. $f(x) = x\cos x \operatorname{sen} x$ **h.** $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+4}{5}$ **i.** $f(t) = t^4\sqrt{x}$

j. $f(y) = \dfrac{ln\, y}{y}$ **k.** $f(x) = 2\operatorname{tg} x + \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ **l.** $f(t) = e^t \operatorname{sen} t + e^2 \operatorname{tg} t$

6. Calcule a derivada das funções indicadas, simplificando o resultado quando possível.

a. $y = \operatorname{sen}(x^5)$ **b.** $f(x) = \operatorname{sen}^5 x$ **c.** $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$

d. $y = x\, e^{\frac{1}{x}}$ **e.** $y = ln(t^2+3t+9)$ **f.** $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$

g. $f(t) = \cos(x^2-3)$ **h.** $f(t) = (2x-\pi^2)^{2012}$ **i.** $y = x\, e^{-x^2}$

j. $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ **k.** $f(y) = \sec(\sqrt{x^2+1})$ **l.** $f(x) = x\operatorname{sen}(x^2-\sqrt{x})$

7. Determine a função derivada das funções dos exercícios I.2.a até I.2.d. da lista 2.0. (onde existirem).

8. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2}\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x})$. Determine a função f', onde existir. (Cuidado com a verificação de derivabilidade em $x=0$ e em $x=1$.)

9. Calcule a derivada de 2a. ordem das funções do exercício 7 que estão nos ítens de a até o i.

10. Seja $y = e^x\cos x$. Verifique que $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$.

11. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável em $x=0$ tal que $f(0)=f'(0)=0$. Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função limitada e não derivável em $x=0$. Calcule a derivada de $h(x)=f(x)g(x)$ no ponto $x=0$.

12. (Pensante!) Sejam f e g funções deriváveis em $\mathbf{I}$, intervalo aberto, e $a\in\mathbf{I}$. Considere $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > a \\ g(x) & \text{se } x \leq a \end{cases}$. Prove que h é derivável em $x=a$ se, e somente se, $f(a)=g(a)$ e $f'(a)=g'(a)$.

II. Sobre reta tangente

1. Seja a curva $y = x^3+2x+1$.

a. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função dada no ponto $(2, f(2))$.

b. Determine o(s) ponto(s) sobre o gráfico da função dada em que a reta tangente é paralela a reta $y-5x+3=0$. Qual é (são) a(s) equação(ões) dessa(s) reta(s)?

2. Determine a equação da reta que é tangente à curva $y = x^3+2x^2-3x$ e que passa pela origem.

3. Determine todas as retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$ que passam pelo ponto $(0,0)$

4. Determine a reta r que é perpendicular à reta $3x+y=3$ e tangente ao gráfico de $f(x)=x^3$.

5. Determine todos os pontos (a,b) sobre a curva $y = x^4-8x^2+16x+7$ tais que a tangente à curva em (a,b) seja paralela à reta $16x-y+5=0$.

6. Sabe-se que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3 é $x+2y=6$. Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $g(x) = (f(\sqrt{9+4x}))^2$. Determine $g'(0)$.